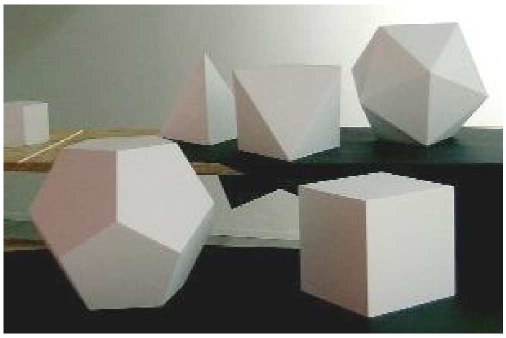
# PARTE A: Relazioni platoniche

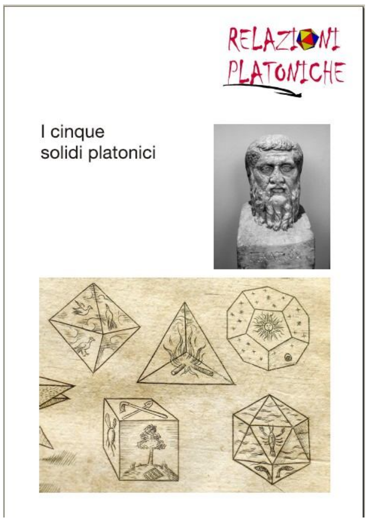
## 1. I solidi Platonici

### 1.1 Poliedri platonici

Attorno al 360 A.C. nel Timeo Platone descrive cinque poliedri speciali: tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro e icosaedro. Per questo motivo vengono detti *solidi platonici*. E’ la più antica descrizione scritta in nostro possesso di questi poliedri, ma la loro reale scoperta è precedente. Cubo e tetraedro erano sicuramente noti da secoli, e molto probabilmente già Pitagora e i pitagorici conoscevano anche il dodecaedro, circa duecento anni prima della descrizione platonica. Invece la scoperta degli ultimi due poliedri (ottaedro e icosaedro) è accreditata a Teeto, contemporaneo e amico di Platone.



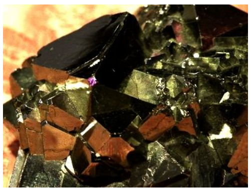
L’interesse di Platone per questi solidi è dovuto alla loro perfezione ideale e cioè al loro alto grado di simmetria. Cosa intendiamo esattamente? Osserviamo ad esempio un cubo. Se io cambio la faccia con cui è appoggiato al piano, il suo aspetto rimane il medesimo. Lo stesso accade se cambio lo spigolo di base che ci si presenta di fronte: ancora una volta l’aspetto del poliedro non cambia. Lo stesso può essere detto per ognuno dei cinque solidi platonici.



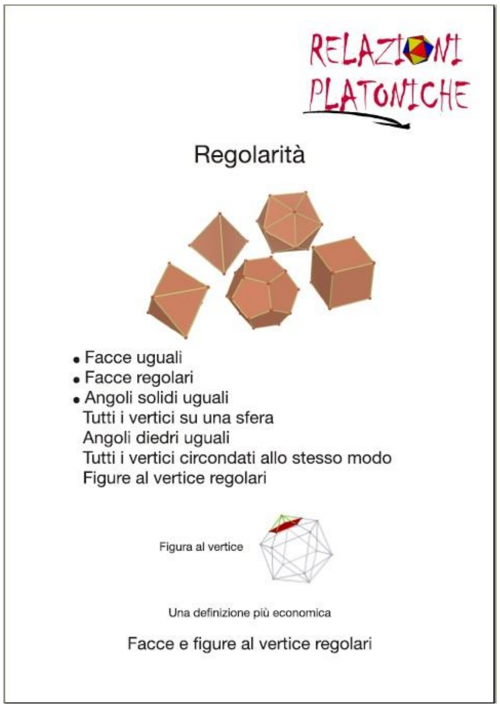

In virtù della loro perfezione ideale, nel Timeo Platone associa questi poliedri agli elementi naturali: il tetraedro col fuoco, il cubo con la terra, l’ottaerdro con l’aria e l’icosaedro con l’acqua. L’ultimo dei cinque, il dodecaedro è scelto per simbolizzare l’armonia dell’intero universo. I disegni del pannello sono opera di Keplero (1571-1630).

### 1.2 Sul concetto di regolarità

Osserviamo l’ottaedro ed il dodecaedro. Il primo è decisamente più semplice del secondo, ma stranamente il secondo è stato scoperto circa 200 anni prima. Come mai? Si potrebbe pensare che ciò sia dovuto alla presenza del dodecaedro in natura, nei cristalli di pirite (che i pitagorici conoscevano bene) ma in natura vi sono anche cristalli a forma di ottaedro, ad esempio la stessa pirite può cristallizzare in forma ottaedrica.

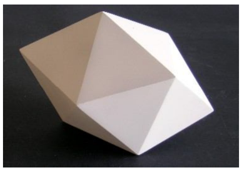


Gli storici ipotizzano che il ritardo nella scoperta dell'ottaedro sia dovuto al fatto che non era ancora stata focalizzata esattamente la proprietà essenziale che determina l'attrattiva estetica dei poliedri platonici: la *regolarità*.
Prima dell'introduzione del concetto di regolarità, l'ottaedro poteva sembrare un solido banale (in fondo si tratta di una semplice doppia piramide) e forse per questo non ha attratto l'attenzione dei matematici.
Invece, una volta formulata la nozione di regolarità, era abbastanza naturale ricercare un elenco completo di tutte le figure solide regolari e quindi scoprire anche l'ottaedro e l'icosaedro. La prima formulazione della nozione di regolarità è generalmente attribuita a Teeto, e questo spiegherebbe perché proprio Teeto descrisse per primo l'icosaedro e l'ottaedro.

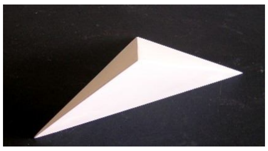



Ma cosa determina la regolarità di un solido? Osserviamo i nostri cinque modelli. Possiamo facilmente notare che in ognuno di essi le facce sono poligoni *uguali*. Ma non solo: tutte le facce sono poligoni *regolari*; infatti i triangoli sono tutti *equilateri*, i quadrilateri sono tutti *quadrati* e i pentagoni sono tutti *regolari*. Queste due caratteristiche tuttavia non bastano a caratterizzare i poliedri regolari. Osserviamo anche gli angoli solidi, quelli cioè formati dalle facce che concorrono in un vertice: anche gli angoli solidi sono tutti uguali: in ogni vertice del cubo concorrono tre quadrati; in ogni vertice dell'icosaedro concorrono 5 triangoli, e così via. In sintesi in un poliedro regolare le facce sono uguali e regolari, e gli angoli solidi sono uguali.

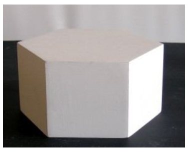
Questi tre nuovi solidi aiuteranno a comprendere meglio cosa è un poliedro regolare.
Cominciamo ad osservare che nessuno di questi nuovi solidi mostra un grado di simmetria così alto come i solidi platonici: infatti a seconda della faccia con cui li appoggiamo sul piano, e a seconda dello spigolo con cui questa faccia si presenta all'osservatore, il loro aspetto cambia notevolmente.
Ora mostreremo che ciascuno di essi possiede due delle caratteristiche che determinano la regolarità, ma tutte e tre.



In questo *deltaedro* tutte le



In questo *disfenoide* gli angoli



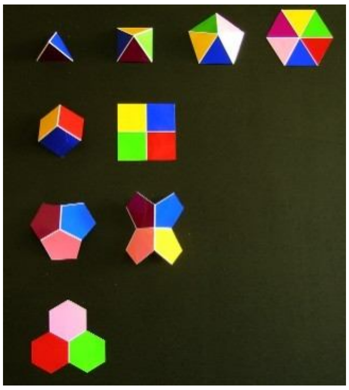
Infine in questo prisma gli angoli solidi facce sono uguali e regolari (sono lo stesso triangolo equilatero), ma ci sono angoli solidi differenti (in alcuni vertici si incontrano quattro triangoli ed in altri cinque).

solidi sono uguali e le facce sono uguali, ma non regolari (si tratta di triangoli scaleni, non equilateri).

sono tutti uguali (sono delimitati da due quadrati e un esagono) e le facce sono regolari; tuttavia le facce non sono tutte uguali ma di due tipi diversi.

**1.3 I solidi regolari sono 5**

Perché siamo certi che i solidi regolari siano solo i 5 platonici? Chi può garantire che domani qualche geometra particolarmente geniale non ne scoprirà qualcuno nuovo? La definizione di regolarità e questi modellini aiuteranno a capire come mai questa eventualità non si verificherà mai.
Siccome in un poliedro regolare gli angoli solidi devono essere uguali, possiamo considerarne uno solo per ogni solido. Tre o più poligoni regolari uguali devono delimitarlo: triangoli equilateri, o quadrati, o pentagoni regolari, o esagoni regolari e così via. Esaminiamo la casistica possibile.
Cominciamo dai triangoli equilateri:
In un vertice ne possono concorrere tre (come nel *tetraedro*), quattro (come nell'*ottaedro*), o cinque (come nell'*icosaedro*) ma non più, perché sei triangoli equilateri concorrenti si dispongono su un piano.



Le facce quadrate possono concorrere in un vertice solo a tre a tre (come nel *cubo*) perché già quattro si dispongono in un piano.
Le facce pentagonali regolari si possono disporre solo a tre a tre (come nel *dodecaedro*): guardate cosa succederebbe se le facce fossero anche solo quattro!
Altre possibilità non ce ne sono: gli esagoni regolari già a tre a tre si dispongono in un piano. A maggior ragione ogni poligono regolare di sette o più lati.
In conclusione, possiamo affermare che i poliedri regolari sono solo i cinque già noti.

## 2. Costruzioni

### 2.1 Tetraedro e ottaedro

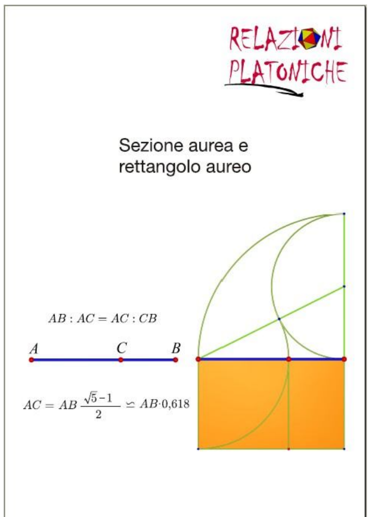
Nell'ultimo libro degli *Elementi*, il XIII, Euclide presenta una costruzione dei 5 poliedri platonici. Qui assumiamo nota quella del cubo e mostriamo una possibile costruzione degli altri quattro solidi a partire da essa:

Cominciamo dal *Tetraedro*: partendo da un vertice del cubo si tracciano le diagonali delle tre facce concorrenti in esso; poi si unircono attraverso altre tre diagonali gli estremi liberi delle prime tre.

Per l'*Ottaedro* uniamo con uno spigolo il centro di ogni faccia del cubo con il centro delle quattro facce limitrofe.

### 2.2 Sezione Aurea

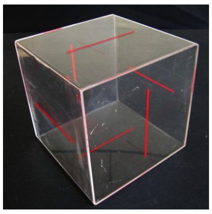
(Illustrare i pannello) Per la costruzione degli ultimi due solidi occorre saper dividere un segmento secondo la *sezione aurea*. Un segmento $AB$ di lunghezza $a$ è diviso secondo la sezione aurea da un punto $C$ se la parte $AC$ risulta media proporzionale fra la restante parte $BC$ e l'intero segmento. La sezione aurea di un segmento si ottiene approssimativamente moltiplicando la sua lunghezza per 0.618.
La costruzione con riga e compasso della sezione aurea di un segmento è mostrata nel pannello. Un rettangolo che abbia un lato di lunghezza assegnata e l'altro lato in rapporto aureo col primo è detto *rettangolo aureo*. Questo particolare rettangolo ci sarà molto utile fra breve.



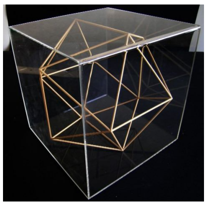

Il compasso aureo (mostrare dispositivo e usarlo sul pannello) è uno strumento che permette agevolmente di verificare se un segmento è diviso in due secondo il rapporto aureo oppure no.

### 2.3 Dodecaedro e Icosaedro

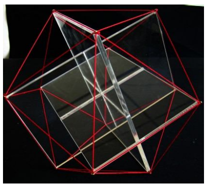
Ora possiamo mostrare la costruzione del dodecaedro e dell’icosaedro a partire dal cubo. Dapprima occorre segnare le facce di un cubo attraverso opportuni segmenti, quelli in rosso nel modello:  su ogni faccia del cubo, lungo la linea mediana, è staccato centralmente un segmento che è la sezione aurea dello spigolo del cubo. Il segmento di ogni faccia del cubo è ortogonale a quelli delle facce limitrofe.



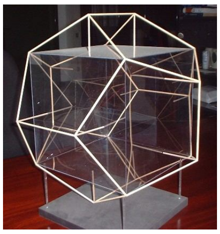
Siamo finalmente pronti per la costruzione dell’icosaedro: basta congiungere gli estremi di ogni segmento con quelli delle facce limitrofe. La costruzione è dovuta a *Piero della Francesca* (1412-1492), pittore rinascimentale e studioso di matematica, di cui parleremo fra poco.



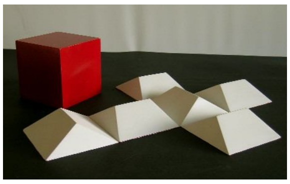
La costruzione equivale a congiungere opportunamente i vertici di tre rettangoli aurei ortogonali con centri coincidenti.

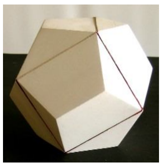


E ora il dodecaedro: a partire dal cubo segnato eleviamo su ogni faccia un *tettuccio* che abbia lo spigolo in alto lungo come la sezione aurea del lato del cubo e come altezza metà della sezione aurea.



La costruzione del dodecaedro è alla base di questo simpatico oggetto snodabile: avvolgendo il cubo rosso con questi tettucci bianchi otteniamo il dodecaedro. Ma questo dodecaedro può anche essere *fagocitato* dal cubo stesso, avvolgendo i tettucci a rovescio.



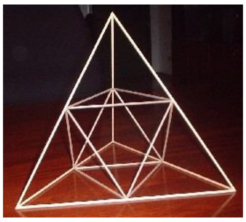


## 3. Relazioni Platoniche

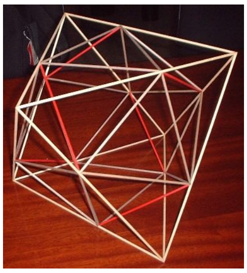
### 3.1 Alcune relazioni fra i poliedri platonici

Esistono molte relazioni che collegano strettamente l'uno all'altro i solidi platonici. Ad esempio abbiamo già visto che il cubo è in stretta relazione con ciascuno degli altri solidi. Queste relazioni vengonoi chiamate *relazioni platoniche*. Qui ne sono illustrate altre.

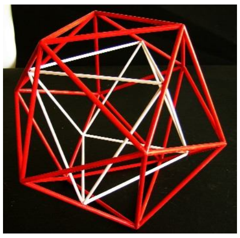
Collegando i punti medi degli spigoli di un tetraedro si ottiene un ottaedro.



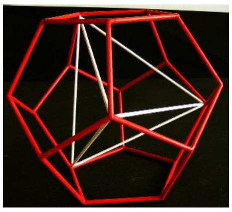
Sezionando gli spigoli di un ottaedro secondo il rapporto aureo e congiungendo i punti-sezione si ottiene un icosaedro;



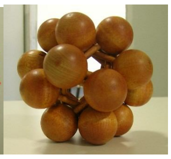
Congiungendo i punti medi di sei spigoli di un icosaedro scelti opportunamente (quelli che appartengono alla superficie di un medesimo cubo) si ottiene un ottaedro.



Selezionando opportunamente quattro dei venti vertici di un dodecaedro e congiungendoli si ottiene un tetraedro.



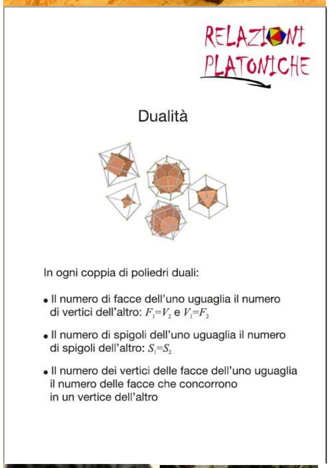
Un dodecaedro può contiene dieci diversi tetraedri. In questo origami ne sono mostrati 5. Questo puzzle commerciale è basato sugli stessi 5 tetraedri.



### 3.2 La relazione di dualità

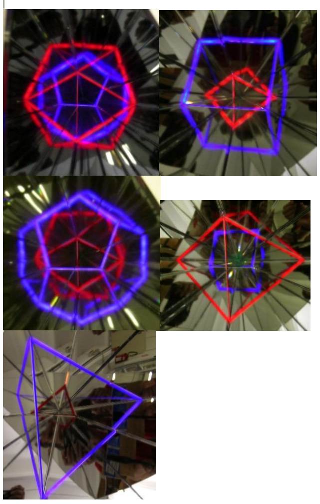
Oltre a queste relazioni fra i nostri poliedri ve ne è una molto importante di carattere assai generale, che quindi non riguarda solo i poliedri platonici, e ancora più in generale non riguarda solo poliedri, detta relazione di *dualità*. Vediamola nel caso dei solidi platonici.

Se in un cubo si congiungono i centri delle facce con quelli delle facce contigue si ottiene un ottaedro. Viceversa, se in un ottaedro si congiungono i centri delle facce con quelli delle facce contigue si ottiene un cubo. Si dice che cubo e ottaedro sono poliedri duali l'uno dell'altro.
E ancora, se in un dodecaedro si congiungono i centri delle facce con quelli delle facce contigue si ottiene un icosaedro. Viceversa, se in un icosaedro si congiungono i centri delle facce con quelli delle facce contigue si ottiene un dodecaedro. Dodecaedro e icosaedro sono poliedri duali.
Infine, congiungendo i centri delle facce di un tetraedro con quelli delle facce contigue si ottiene ancora un tetraedro. Il tetraedro è auto-duale, ovvero duale di se stesso.




Fra due poliedri duali:

- il numero delle facce dell'uno uguaglia il numero dei vertici dell'altro e viceversa
- il numero di spigoli è lo stesso
- il numero di vertici delle facce dell'uno uguaglia il numero di facce che concorrono in un vertice dell'altro



E per concludere, ecco un modo più spettacolare di presentare la relazione di dualità. In questa realizzazione i poliedri sono fatti… di luce. Questi sistemi di specchi si chiamano *caleidoscopi* e verranno illustrati in dettaglio nella prossima sezione. Notate che i caleidoscopi sono completamente vuoti!

## 4. I solidi platonici nell’arte del rinascimento

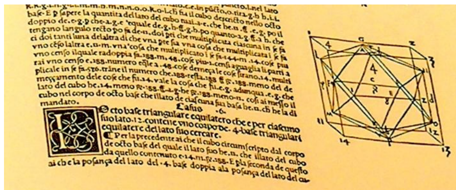
Il rinascimento è un momento molto importante nella storia della geometria poliedrica.
Dopo il vertice raggiunto dalla matematica greca del periodo classico con *Euclide*, e poi avanti fino ai primi secoli dopo Cristo con matematici come *Pappo di Alessandria*, l’interesse per questa branca della geometria era andato via via affievolendosi, al punto che per più di un millennio la geometria dei poliedri non aveva più ricevuto nuovi significativi contributi.
Nel Rinascimento improvvisamente l’interesse per la geometria poliedrica si riaccende. Due particolari circostanze concorrono a determinare questa rinascita di interesse: da un lato abbiamo l’affermazione del neoplatonismo e quindi la rinascita dell’interesse per le forme ideali e perfette dei poliedri regolari. Dall’altro abbiamo l’invenzione della prospettiva, che permetteva nelle due dimensioni del piano una resa efficace della terza dimensione dei corpi solidi. La possibilità di una accurata resa prospettica di un solido ne agevola notevolmente lo studio. D’altra parte il disegno di poliedri costituiva per gli artisti una palestra perfetta per impratichirsi nelle regole della prospettiva.
Il primo importante contributo alla rinascita della geometria poliedrica è venuto da Piero della Francesca, uno dei maggiori artisti del ‘400 italiano. Piero fu anche un matematico di valore, e nella sua carriera scrisse tre importanti trattati scientifici. *Il Trattato d’Abaco*, il *Libellus de quinque corporibus regularibus* e il *De prospectiva pingendi*.
In una parte del *Trattato d’abaco* ma soprattutto nel *Libellus* Piero riprende la trattazione di Euclide sui solidi regolari, apportando anche nuovi originali contributi.
Qui vedete alcune illustrazioni tratte dal suo *Libellus*. Piero aveva inserito i solidi regolari in nuovi problemi di tipo algebrico, riguardanti fra l’altro il calcolo degli spigoli dei poliedri essendo noto il raggio della sfera circoscritta. Inoltre, sempre nel *Libellus* Piero si era interessato di relazioni fra i solidi platonici.

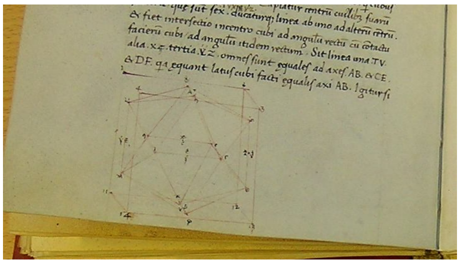

Fra i discepoli di Piero c’è il matematico e frate domenicano Luca Pacioli. La sua opera principale è l’importante trattato “*De divina proportione*”, di cui qui abbiamo copie anastatiche della versione manoscritta della Biblioteca Ambrosiana e dell’edizione veneziana a stampa. Entrambe hanno motivi di grande interesse.

La versione manoscritta contiene alcune famose illustrazioni di poliedri dovute a Leonardo da Vinci. Queste bellissime illustrazioni hanno esercitato un grande fascino ed hanno notevolmente contribuito alla rinascita dell’interesse per i poliedri. Il contributo del genio leonardesco risiede nell’idea di rappresentare i solidi “vuoti” attraverso il loro scheletro ligneo. Questa tecnica permette la visione anche della parte nascosta del poliedro in una sorta di trasparenza, e nel contempo evita di confondere le linee in primo piano e in secondo piano, cosa che renderebbe difficile la percezione tridimensionale.

Il fascino esercitato dai disegni leonardeschi ha avuto nel tempo una grande importanza nella diffusione dell’interesse per la geometria poliedrica da parte di numerosi artisti rinascimentali.

Invece la versione a stampa del *De divina proportione* ha un diverso motivo di interesse: in essa Luca Pacioli inserisce la traduzione in volgare dell’opera di Piero sui poliedri, omettendo però di menzionare la paternità del testo. Questo plagio tuttavia ha almeno contribuito a far sì che il lavoro di Piero, che altrimenti sarebbe stato dimenticato, arrivasse fino a noi.
Le illustrazioni a stampa ricalcano fedelmente le figure autografe di Piero, ed in esse è facile individuare molte delle costruzioni presentate nella prima parte del nostro percorso.
In particolare notate la rappresentazione dell’icosaedro nel cubo: è una invenzione matematica di Piero.





L’interesse per la geometria poliedrica non ha caratterizzato solo il Rinascimento italiano, ma anche quello tedesco. Fra i suoi più grandi protagonisti occorre citare almeno Albrecht Dürer. La sua abilità e sensibilità geometrica è nota a tutti, ma in particolare riguardo ai poliedri Dürer vanta alcuni importanti primati, come vedremo più avanti nella mostra. Per adesso ci limiteremo a ricordare che è sua l’invenzione dello *sviluppo piano* di un poliedro cioè di quella tecnica che illustra la struttura di un poliedro attraverso il disegno in piano delle facce e delle loro connessioni.  Storicamente è un passo importante nel processo che condurrà i matematici a studiare i poliedri non tanto come solidi quanto piuttosto come superfici.