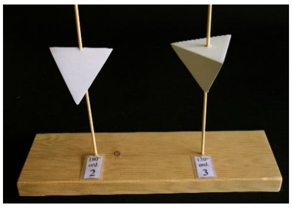
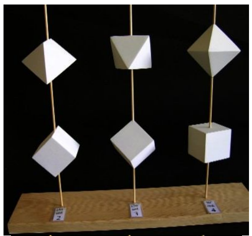
# PARTE B: Simmetrie

## 5. Le simmetrie dei solidi platonici

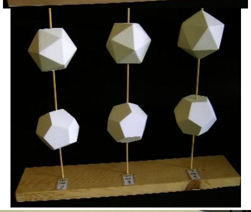
La relazione di dualità suggerisce di ripartire i cinque solidi platonici in tre famiglie distinte: cubo e ottaedro da una parte, dodecaedro e icosaedro dall'altra, e infine il tetraedro che fa famiglia a sé.
La base teorica di questa suddivisione risiede però altrove, e cioè nelle simmetrie dei cinque poliedri: rotazioni e riflessioni.
Cominciamo a considerare le rotazioni che trasformano un poliedro in sé.
Il tetraedro può ruotare di 180° attorno a questo asse e la sua nuova posizione è indistinguibile dalla prima. Una seconda rotazione di 180° riporta il tetraedro nella posizione iniziale. Per questo si dice che questo asse di rotazione ha ordine 2.
Invece attorno a quest'altro asse può compiere tre rotazioni successive di 120° prima di ritornare nella posizione iniziale e ogni nuova posizione è indistinguibile dalle altre. Si dice che quest'asse ha ordine 3.
In sintesi, il tetraedro ha assi di rotazioni di ordine 2 e 3.



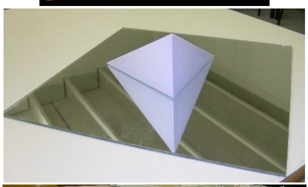
In modo analogo possiamo analizzare le rotazioni degli altri poliedri. Sia cubo che ottaedro hanno assi di rotazione, di ordine 2, 3 (come il tetraedro) ma anche di ordine 4 (dovuti alla presenza di facce quadrate o di vertici con quattro triangoli).

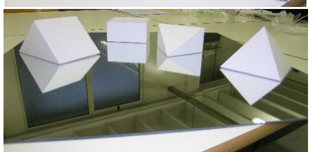


Icosaedro e dodecaedro hanno assi di rotazione, di ordine 2, 3 ma anche 5 (dovuti alla presenza di facce pentagonali o di vertici con cinque triangoli).

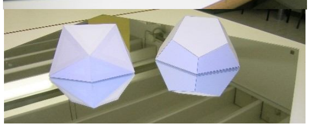


Veniamo ora alle riflessioni. Osservate questa forma irregolare. Ora appoggiamola sullo specchio. La forma irregolare assieme alla sua immagine riflessa formano un tetraedro regolare. Il piano dello specchio è dunque un piano di riflessione del tetraedro.
Il tetraedro ha 6 diversi piani di riflessione di questo tipo.
Analogamente queste due forme irregolari appoggiate allo specchio formano un cubo. Analogamente queste altre due producono l'immagine di un Ottaedro. Dunque Cubo e Ottaedro hanno 2 diversi piani di riflessione per un totale di 9 riflessioni.





Analogamente possiamo vedere che Icosaedro e Dodecaedro hanno piani di riflessione di un unico tipo, per un totale di 15.



Quanto abbiamo visto può essere riassunto così:
Le tre famiglie in cui i poliedri regolari si dividono, sono determinate dalle loro simmetrie, e cioè poliedri di una stessa famiglia hanno esattamente le stesse rotazioni e le stesse riflessioni. Si dice che le simmetrie di una stessa famiglia formano un *gruppo di simmetria*.
Abbiamo dunque il gruppo di simmetria del Tetraedro, cioè il gruppo *Tetraedrico*, quello delle simmetrie dell'Ottaedro e del Cubo, cioè il gruppo *Ottaedrico*, e infine quello dell'Icosaedro e del Dodecaedro, il gruppo *Icosaedrico*.


RELAZIONI PLATONICHE

Le simmetrie dei poliedri

Le simmetrie dei solidi regolari

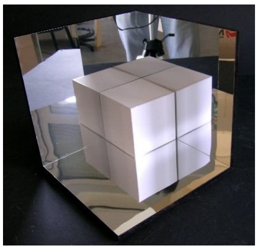
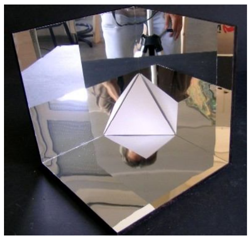
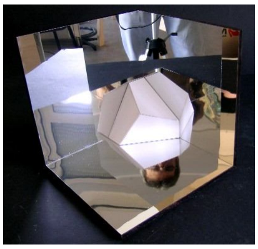
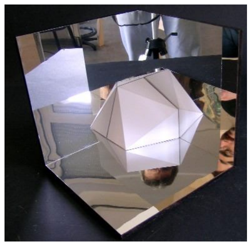
| | Rotazioni | Riflessioni | Roto-riflessioni |
|---|---|---|---|
| Tetraedro | 12 | 6 | 6 |
| Cubo e Ottaedro | 24 | 9 | 15 |
| Dodecaedro e Icosaedro | 60 | 15 | 45 |

Gruppi di simmetria dei solidi regolari

| | Sole Rotazioni | Rotazioni e Riflessioni |
|---|---|---|
| Tetraedro | $T$ | $T_d$ |
| Cubo e Ottaedro | $O$ | $O_h$ |
| Dodecaedro e Icosaedro | $I$ | $I_h$ |

Piramidi e prismi regolari hanno un minor grado di simmetria.
Le loro isometrie formano i gruppi $C$ e $D$

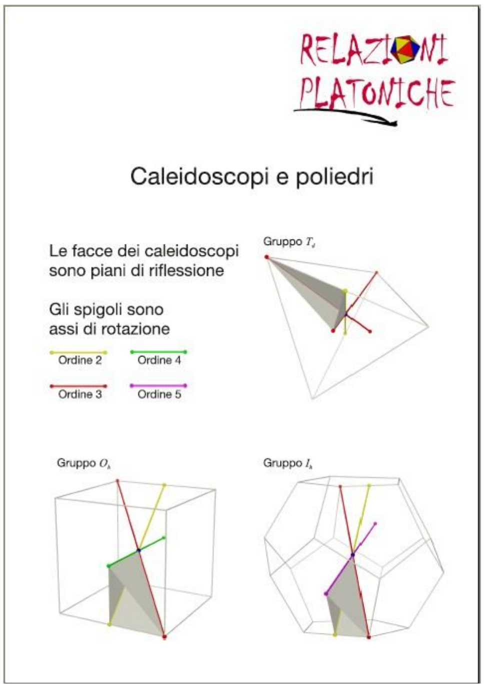
Utilizzeremo ora le riflessioni dei poliedri platonici in questo semplice dispositivo. E' un sistema di tre specchi ortogonali che permette di ottenere alcuni solidi a partire da una loro piccola parte, una di queste sagome bianche:
Introducendo questa sagoma nel caleidoscopio possiamo ottenere il cubo (questo si poteva facilmente intuire)…
Con questa otteniamo l'ottaedro; anche in questo caso il risultato era imaginabile…
Invece con questa sagoma le cose sono un po' più difficili da immaginare; guardate… il dodecaedro…
E con questa sagoma? …ecco l'icosaedro.
E il tetraedro? Be' per quanto proviate ad escogitare la sagoma giusta, non potete ottenerlo in questo sistema, e questo è un po' strano, visto che è il solido regolare più semplice… Come si spiega? Il motivo è che i primi quattro poliedri hanno 3 piani di riflessione *ortogonali*, perpendicolari l'uno all'altro come in questo sistema di specchi, mentre tra i 6 piani di riflessione del tetraedro non ve ne sono tre ortogonali.

# 6. Caleidoscopi

## 6.1 Caleidoscopi

Osserviamo questa immagine di un cubo.
Questo punto è il centro del cubo…
questo è il centro di una faccia…
questo è il centro di uno spigolo…
e infine questo è un vertice.
Questi punti determinano i piani in grigio del disegno, che sono 3 piani di riflessione del cubo, mentre gli spigoli colorati sono 3 assi di rotazione del cubo.
Chiamiamo caleidoscopio un modello reale a facce specchianti di questa figura.
Questo dispositivo è interessante perché in esso sono incorporate esattamente tutte le simmetrie del cubo (e quindi dell'ottaedro).
Anche per le simmetrie del tetraedro e per le simmetrie dell'icosaedro (e dodecaedro) è possibile creare analoghi caleidoscopi.
E' facile immaginare che questi caleidoscopi possono ricreare le immagini dei poliedri con le corrispondenti simmetrie a partire da una loro piccola parte. Qui possiamo vedere tre esempi.




Ora inseriremo nei caleidoscopi elementi come questo
Come vedete, qui c'è una superficie sferica triangolare, un *triangolo sferico*. L'inserimento di questi elementi produce per riflessione l'intera sfera, divisa in tanti triangoli sferici uguali: 24, nel caleidoscopio del gruppo *Tetraedrico*, 48 in quello *Ottaedrico* e 120 in quello *Icosaedrico*.


Ora, con l'aiuto di questo laser-beam proiettiamo sulla superficie dei triangoli sferici un punto luminoso.
Vedete? viene moltiplicato dagli specchi, uno per ciascun triangolo, secondo i vertici di poliedri virtuali.
Nel caleidoscopio del gruppo *Tetraedrico* possiamo disporre i punti luminosi come i vertici di un tetraedro, nel caleidoscopio *Ottaedrico* possiamo ottenere vertici disposti come in un cubo o in un ottaedro. Infine nell'ultimo caleidoscopio possiamo ottenere un icosaedro ed un dodecaedro virtuali: questo semplice esperimento ci mostra che i solidi regolari sono inscritti in una sfera.


## 6.2 Sfere di Moebius

Qui abbiamo dei modelli reali delle tre partizioni della sfera che abbiamo visto nei caleidoscopi.

Le tre sfere mostrano la partizione in triangoli sferici dei tre gruppi di simmetria. Come notate i vertici dei triangoli sferici sono segnati in colori diversi. Perché?

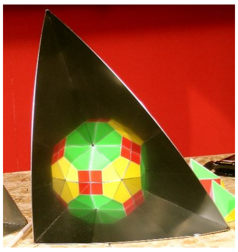
Se in ogni sfera si congiungono i vertici di un medesimo colore si ottiene un poliedro particolare. Tutti questi poliedri sono mostrati nelle sfere trasparenti, nei corrispondenti colori.

Ancora una volta possiamo ammirare i cinque solidi platonici. In più, abbiamo due nuovi poliedri chiamati rispettivamente *cubottaedro* e *icosidodecaedro*. Questi due nuovi solidi non sono regolari, perché le loro facce non sono tutte uguali: nel primo caso abbiamo sia triangoli che quadrati; nel secondo caso ci sono sia triangoli che pentagoni.

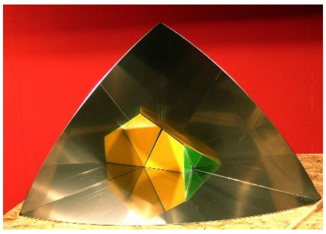
Abbiamo scoperto un nuovo tipo di solido.

# 7. I solidi Archimedei

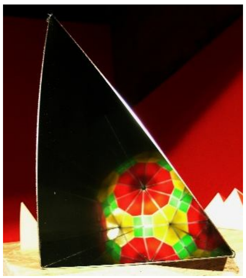
## 7.1 La semi-regolarità



Torniamo ai caleidoscopi. Inserendovi dei nuovi cunei colorati come questi possiamo visualizzare immagini più vivide di questi due nuovi poliedri:
questo è il *cubottaedro* …
e questo è l'*icosidodecaedro*.
Il caleidoscopio aiuta a capire che questi nuovi poliedri hanno le stesse simmetrie (rotazioni e riflessioni) dei corrispondenti solidi platonici.



Ma a questo punto la fantasia si può sbizzarrire alla ricerca di molti altri nuovi poliedri dalle facce regolari anche se diverse.
Il vertice in cui si incontrano le faccette colorate equivale al punto luminoso sulla sfera che abbiamo visto prima. Guardate: possiamo riproiettarlo… ed ogni punto luminoso si colloca esattamente su uno dei vertici del poliedro.



Questi nuovi poliedri hanno caratteristiche comuni: gli spigoli hanno tutti la stessa lunghezza, e le facce sono tutte regolari ma di tipo diverso; ad esempio qui vediamo decagoni ed esagoni regolari, e quadrati. Inoltre gli angoli solidi sono tutti uguali: ad esempio, in questo caso attorno ad ogni vertice abbiamo un decagono, un quadrato ed un esagono. Qui invece attorno ad ogni vertice abbiamo un ottagono, un esagono ed un quadrato.

Poliedri di questo tipo sono detti *semi-regolari*, e sono caratterizzati da

- facce regolari di 2 o 3 tipi diversi e di lato uguale
- tutti i vertici su una sfera.

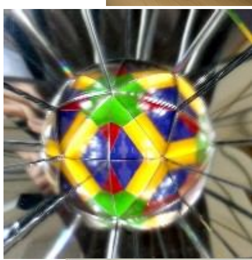
I solidi semiregolari sono in tutto 13, ma quelli che si possono ottenere coi tre caleidoscopi sono solo 11. Vedremo più avanti perchè.
Pappo di Alessandria (circa 290-350 D.C.) sostiene che i 13 solidi semi-regolari erano già noti ad Archimede (circa 287-212 A.C.). Per questo motivo i solidi semiregolari vengono detti *Archimedei*.
Questi solidi nel corso della storia sono stati dimenticati più volte e riscoperti in modo indipendente da artisti e matematici.

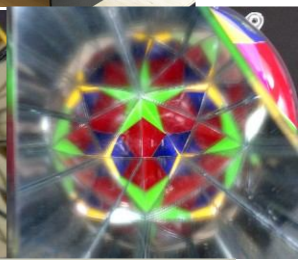
## 7.2 Solidi semi-regolari con riflessione

Queste forme meravigliose sono i modelli reali degli 11 poliedri semiregolari attenibili con i caleidoscopi.
Questi cinque hanno le simmetrie del gruppo *Ottaedrico*, questi cinque hanno le simmetrie del gruppo *Icosaedrico*; infine un solo poliedro semiregolare ha le simmetrie del gruppo *Tetraedrico*.

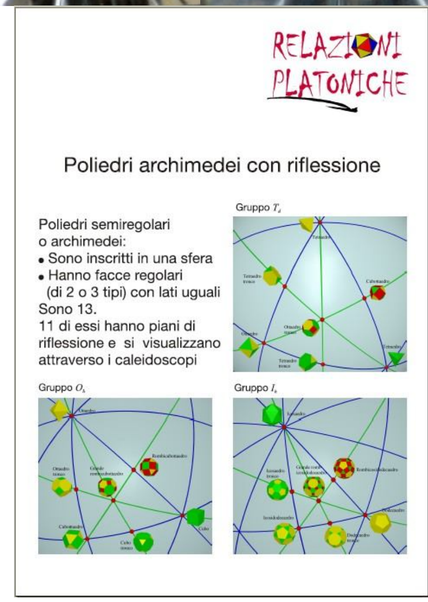
## 7.3 Morphing

Questi dispositivi permettono di creare infiniti poliedri caratterizzati da assegnate simmetrie, semplicemente ruotando le faccette colorate che stanno sul retro. A seconda di ciò si presenta nell’apertura del caleidoscopio si ottiene una forma diversa.
Il primo dispositivo restituisce poliedri con le simmetrie del cubo e dell’ottaedro, mentre il secondo restituisce poliedri con le simmetrie del dodecaedro e dell’icosaedro.

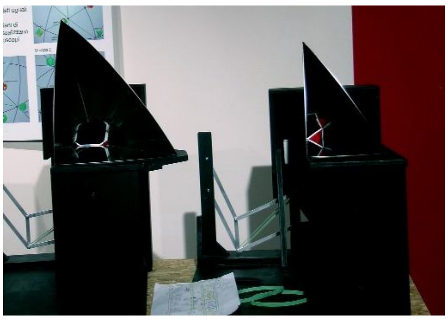




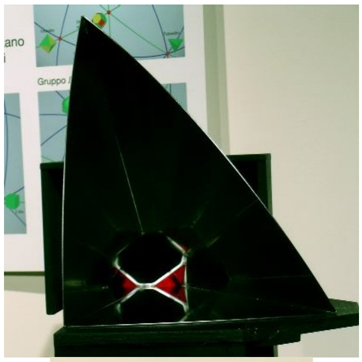
Il pannello mostra come ottenere i poliedri semiregolari posizionando opportunamente un vertice all’interno dei diversi caleidoscopi.




Queste posizioni possono esser seguite passo passo per mezzo di questi due dispositivi, che visualizzano le graduali trasformazioni dei vari poliedri che vi si avvicendano. Il primo caleidoscopio visualizza le simmetrie del gruppo *Ottaedrico*, mentre il secondo è dedicato al gruppo *Icosaedrico*. Le trasformazioni graduali vengono in genere indicate col termine inglese *morphing*.



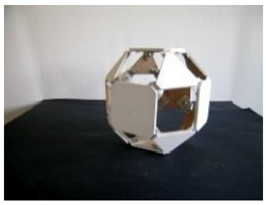
In particolare questi dispositivi ci permettono di capire il concetto di *troncamento*, una invenzione geometrica che dobbiamo ad un artista rinascimentale: Piero della Francesca. Prendiamo ad esempio il cubo. Se da ogni suo vertice rimuoviamo una piccola piramide a base triangolare equilatera, otteniamo un solido fatto di triangoli e ottagoni. Se tutti i poligoni ottenuti sono regolari, si ottiene un solido semiregolare detto *cubo tronco*, perché ottenuto *troncando* i vertici del cubo. Se il troncamento ai vertici del cubo viene fatto più “in profondità”, e cioè nel punto medio dello spigolo del cubo tesso, otteniamo un altro solido archimedeo: il *cubottaedro*. La stessa cosa può essere fatta a partire da qualunque solido regolare. Ad esempio in questo caso troncando i vertici di un icosaedro otteniamo un poliedro composto di pentagoni ed esagoni regolari che ha l’aspetto del pallone da calcio: l’*icosaedro tronco*, mentre procedendo fino al punto medio dello spigolo dell’icosaedro otteniamo l’*icosidodecaedro*.



### 7.4 I solidi archimedei senza riflessioni (chirali)

Questi tre dispositivi si chiamano *Jitterbug*, parola americana che designa un modo di ballare degli anni 50-60 simile all’andamento di un ubriaco.
Guardiamo il primo. L’apparenza è quella di un cubottaedro, uno sei solidi semiregolari del gruppo *Ottaedrico*.

Ora, se imprimo questa rotazione il solido si espande e gradualmente e assume le forme di un rombicubottaedro, un altro solido semiregolare del gruppo *Ottaerdico*. Infine, proseguendo con la rotazione il solido collassa nuovamente in un cubottaedro, il solido di partenza.



E ora vediamo la cosa più interessante di questo dispositivo.
Ripartiamo dall’inizio e osserviamo meglio. Nella posizione iniziale il solido è perfettamente simmetrico (la metà di sinistra è l’esatta immagine speculare della metà di destra. È come se in mezzo alle due mani ci mani fosse uno specchio.

Anche nella posizione espansa la figura è perfettamente simmetrica.
Invece nelle posizioni intermedie il solido a causa delle rotazioni imposte, non ha riflessioni.
Osserviamo bene il solido che si forma ora. Ha per facce quadrati e triangolari; si vedono anche delle

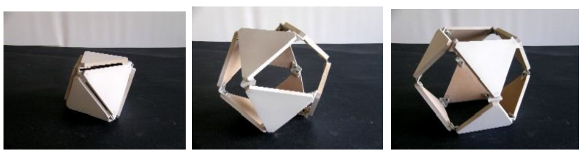
losanghe vuote, che dobbiamo immaginare come coppie di triangoli isosceli. Se ruotiamo fino a farli diventare equilateri, otteniamo questo strano poliedro fatto di quadrati e triangoli equilateri.
Possiamo osservarlo meglio in questo modello statico. Ha tutte le facce regolari ma di due tipi diversi, e i suoi vertici sono posti su una sfera ideale. Dunque è un nuovo poliedro semiregolare. Si chiama *cubo simo*, e come indica il suo nome è imparentato con il cubo, di cui però non ha le riflessioni, ma *solo le rotazioni*.

Il poliedro e la sua immagine speculare non sono sovrapponibili, un po' come succede con una scarpa destra e una sinistra. Dunque abbiamo due varianti del *cubo simo*, che vengono dette levogira e destrogira.
Col Jitterbug possiamo ottenere entrambe le varianti: così abbiamo il cubo simo levogiro …
e così quello destrogiro.

Questo nuovo jitterbug funziona analogamente ma è basato sulle rotazioni del dodecaedro.
Anche in questo caso la figura si espande e collassa nuovamente. La figura di partenza è un icosidodecaedro e quella di massima espansione è un rombicosidodecaedro, due solidi semiregolari già incontrati. Anche in questo caso le figure interessanti sono quelle intermedie, perché perdono le riflessioni del dodecaedro, mantenendone invece le sue rotazioni. Si tratta di una nuova figura semiregolare, chiamata *dodecaedro simo*, composto di pentagoni regolari e triangoli equilateri.

Possiamo osservarlo meglio in questo modello statico. Anche in questo caso il poliedro e la sua immagine speculare non sono sovrapponibili, e dunque del dodecaedro simo abbiamo la variante levogira e quella destrogira.

Abbiamo così scoperto gli ultimi due poliedri semiregolari, e abbiamo anche capito perché non li avevamo incontrati lavorando con i caleidoscopi: il motivo è che non hanno piani di riflessione.
E ora l'ultimo jitterbug, quello basato sulle rotazioni del tetraedro. Nella posizione più contratta vediamo un ottaedro, mentre nella posizione espansa riconosciamo un cubottaedro. Nelle posizioni intermedie riconosciamo l'icosaedro.



**7.5 Altri oggetti con sole rotazioni**

Questi nuovi oggetti dalle forme così bizzarre ma molto attraenti non sono certo dei poliedri; eppure sono oggetti abbastanza strettamente imparentati ad essi . La caratteristica che li accomuna ai poliedri appena considerati è che anche questi oggetti hanno le stesse rotazioni del tetraedro, o del cubo, o del dodecaedro, ma non le loro riflessioni. Qui abbiamo la prima serie di oggetti. Sono costruiti con un numero variabile di faccette tutte uguali che si incastrano l'una all'altra ruotando. Le rotazioni possono essere osservate agevolmente nelle rosette dove avviene l'incastro. Vediamoli uno ad uno.

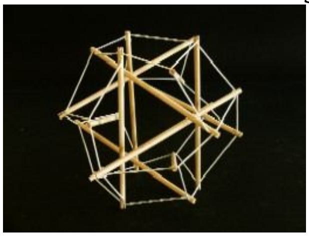
L primo oggetto è formato da 30 faccette (30 come gli spigoli del dodecaedro). Abbiamo ben visibili rotazioni di ordine 5 e 3, ma anche di ordine 2 (gli assi attraversano i centri di due faccette opposte). Ricordate? Sono le rotazioni del dodecaedro.

Quest'altro oggetto è fatto di 12 faccette (tante quanti gli spigoli di un cubo).
Qui è facile osservare rotazioni di ordine 4 e 3, mentre le rette che uniscono i centri di due faccette opposte sono assi di rotazione di ordine 2: sono esattamente le rotazioni del cubo.

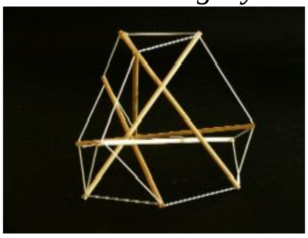
Infine l'ultimo oggetto della serie è fatto da 6 faccette (tante quanti gli spigoli di un tetraedro). Qui abbiamo rotazioni di ordine 3 e 2. In questo caso sono le rotazioni del tetraedro.

La seconda serie di oggetti è fatta di bastoncini e corde tese. Ancora una volta il numero di elementi è 30, o 12 o 6. La cosa interessante è che i bastoncini non si toccano mai, sembrano sospesi nel vuoto: sono agganciati a cordicelle tenute tese dai bastoncini stessi, eppure la loro struttura è perfettamente stabile ed elastica. In fisica vengono chiamate *strutture tensintegre* o semplicemente *tensegrity*.

Nel primo tensegrity abbiamo le rotazioni del dodecaedro (in particolare sono evidenti disposizioni pentagonali e triangolari, mentre gli assi di ordine 2 congiungono i centri di due bastoncini opposti.



Qui invece abbiamo le rotazioni del cubo; in evidenza ci sono disposizioni a quadrato e a triangolo.



Qui infine i bastoncini sono disposti secondo le rotazioni del tetraedro.

## 8. La riscoperta dei solidi Archimedei

Sappiamo bene che il pensiero scientifico può influenzare il lavoro degli artisti e le loro idee: questo ci

appare abbastanza familiare. Meno noto è talvolta il percorso inverso: quello per cui è proprio il lavoro e la ricerca degli artisti ad esercitare una positiva influenza nello sviluppo di idee scientifiche.
Un bell’esempio di questa seconda possibilità è quello offerto dagli artisti rinascimentali e dall’importante contributo che hanno dato alla geometria poliedrica.
Abbiamo già fatto cenno al lungo periodo di oblio durato più di un millennio nel quale non si registra alcun nuovo significativo contributo alla geometria solida. Addirittura in questo periodo alcune delle conoscenze già acquisite riguardo i poliedri erano andare perse: ad esempio i solidi semiregolari erano completamente sconosciuti ai matematici del primo quattrocento, sebbene, stando alla testimonianza di *Pappo*, fossero già tutti noti ad Archimede, nel terzo secolo AC.
La storia che vogliamo richiamare qui è proprio quella della graduale riscoperta dei solidi archimedei. I grandi protagonisti di questa storia sono ancora una volta i grandi artisti del Rinascimento.
Ancora una volta cominciamo da Piero della Francesca e dal suo *Libellus de quinque corporibus regolaribus*. In esso non solo vengono riprese alcune nozioni e costruzioni euclidee riguardo i solidi regolari.
Nella sua esplorazione sui solidi platonici Piero di fatto inventa la nozione di *troncamento*, e attraverso di essa riscopre ben 6 dei 13 poliedri archimedei: i cinque troncamenti propriamente detti dei solidi platonici, più il cubottaedro.


Anche del trattato di Luca Pacioli *De divina Proportione* abbiamo già parlato, così come dell’importanza dei disegni leonardeschi in esso contenuti.
In particolare fra quelli rappresentati figurano anche due semiregolari riscoperti (presumibilmente) proprio da Pacioli: il rombicubottaedro e l’icosidodecaedro.
Abbiamo già detto che a Dürer dobbiamo l’invenzione dello sviluppo piano di un poliedro. Ma anche riguardo i solidi semiregolari Dürer vanta due importanti primati: le riscoperte del grande rombicubottaedro e del cubo simo.
Un altro artista tedesco, Wentzel Jamnitzer, è autore di meravigliose rappresentazioni prospettiche di poliedri, poi pubblicate a stampa nel volume *Perspectiva Corpuorun Regolarium*. In questo volume possiamo vedere la prima rappresentazione nota del rombicosidodecaedro.
Ma il primato nella rappresentazione di questo poliedro è tuttavia da condividere con un’altra figura importante del rinascimento italiano: Daniele Barbaro. Quest’ultimo fu un teorico dell’arte e dell’architettura. Fra le altre sue opere, il volume *La practica della Perspettiva* contiene una rappresentazione del rombicosidodecaedro, ed anche la prima rappresentazione nota del grande rombicosidodecaedro.
Siamo arrivati così alle soglie dell’epoca Barocca. 12 dei tredici solidi regolari erano stati riscoperti.
Tuttavia il lavoro importantissimo degli artisti mancava ancora di una prospettiva unitaria: si trattava spesso di esplorazioni empiriche e non sistematiche, guidate principalmente dal senso estetico, dall’immaginazione artistica, e dalla ricerca di forme nuove ed attraenti.
Gli artisti non avevano ancora chiaro che questi nuovi poliedri facessero parte di una stessa famiglia, di

cui occorreva dare una caratterizzazione formale e di cui occorreva un censimento completo.
Questo tipo di prospettiva è quella che interessa maggiormente in matematica.
Non a caso l'ultimo tassello di questa storia è stato messo da un grande scienziato, Johannes Kepler.
A lui dobbiamo la riscoperta dell'ultimo poliedro archimedeo, il dodecaedro simo, nonché la caratterizzazione di questi solidi, la loro nomenclatura e infine la dimostrazione del fatto che oltre a questi tredici non ci possono essere altri poliedri semiregolari.
Con Keplero la ricerca sui poliedri ritorna nei binari canonici della ricerca matematica. A Keplero si devono ancora molti altri risultati importanti nella geometria poliedrica, alcuni dei quali saranno presentati fra breve.
Tuttavia, occorre sottolineare che nonostante la caratterizzazione più matematica della sua ricerca, Keplero fu sempre animato da una sensibilità estetica e filosofica orientata alla ricerca dell'*armonia*; buona parte dei suoi contributi alla geometria poliedrica sono contenuti in un libro dal titolo rivelatore: *Harmonices mundi*.